$x = y$

05/03/2015

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 81

Ορίζουμε αναδρομικά την Fibonacci ακολουθία (a_n) φυσικών αριθμών φυσικών ως

εξής: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

π.χ $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$. Χρησιμοποιώντας την διαγωνιοποιησιμότητα πινάκων

Βρείτε κλειστό τύπο για το a_n.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\begin{cases} a_3 = a_1 + a_2 \\ a_2 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ομοίως $\begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$

Με επαγωγή βλέπουμε εύκολα ότι (*) $\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-2} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ για $n \geq 3$

Επομένως, για να υπολογίσουμε κλειστό τύπο για a_n αρκεί να υπολογίσουμε (με χρήση αλγορίθμου 79/Παράδειγμα 80) το A^k για $k \geq 1$

Έχουμε $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1$ με διακεκριμένες ρίζες

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Άρα $\chi_A(x) = (x-\lambda_2)(x-\lambda_1)$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$, άρα A είναι διαγωνοποιήσιμος. Δουλεύοντας όπως στο παράδειγμα 80 υπολογίζουμε το A^k για $k \geq 1$ και χρησιμοποιώντας την * μετά απ' τις πράξεις βρίσκουμε: $a_n = (1/\sqrt{5}) \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$

ρίζες του $\chi_A(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 82

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Βρείτε διαφορετικούς πίνακες B με $B^2 = A$

ΒΗΜΑ 1ο: Με πράξεις $\chi_A(x) = (x-3)(x-6)(x-9)$. Άρα υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Μετά από πράξεις υπολογισμού ιδιοχώρων μία τέτοια βάση είναι ~~οι~~ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Θέτουμε $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = P$. Απ' την

Θεωρία $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, Άρα αν B είναι ένας από τους 8 πίνακες

$P = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix}$ Οι ~~πρ~~ 8 πίνακες είναι διαφορετικοί γιατί $PBP^{-1} = PB'P^{-1} \Rightarrow$

$P^{-1}(PBP^{-1})P = P^{-1}(PB'P^{-1})P \Rightarrow B = B'$

ΟΡΙΣΜΟΣ 83 a

Έστω $D_n \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$, για $n=1,2,3,\dots$ ακολουθία πινάκων και $B\in\mathbb{R}^{\mu\times\mu}$

Γράφουμε $D_n = \begin{bmatrix} (d_{11})_n & (d_{12})_n & \dots & (d_{1\mu})_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (d_{\mu 1})_n & (d_{\mu 2})_n & & (d_{\mu\mu})_n \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\mu 1} & b_{\mu 2} & & b_{\mu\mu} \end{bmatrix}$

Λέμε $\lim_{n\to+\infty} D_n = B$ αν για κάθε i,j με $1\le i,j\le\mu$ έχουμε $\lim_{n\to+\infty}(d_{ij})_n = b_{ij}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $D_n = \begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ 1 & 1+(1/n) \end{bmatrix}$ τότε $\lim_{n\to+\infty}\begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ 1 & 1+(1/n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 83 b

Έστω $A\in\mathbb{R}^{\mu\times\mu}$. Ορίζουμε για $n\ge 1$, $D_n\in\mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ ως εξής

$D_n = I_\mu + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 84 (χωρίς απόδειξη)

Υπάρχει (μοναδικός) πίνακας $B\in\mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} D_n = B$. Συμβολίζουμε $B=\exp(A)$ ή $B=e^A$

ΠΡΟΤΑΣΗ 85 (χωρίς απόδειξη)

(i) Έστω $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_\mu \end{bmatrix}$ διαγώνιος. Τότε $e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots\ e^{\lambda_3} \end{bmatrix}$

(ii) Έστω B διαγωνιοποιήσιμος, και $P\in\mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_\mu \end{bmatrix}$

Τότε $e^B = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots\ e^{\lambda_\mu} \end{bmatrix}P^{-1}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 86

Αν A όχι διαγωνιοποιήσιμος γενικά δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός της εκθετικής e^A.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 87

Έστω $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Τότε $\chi_A(x) = \det\begin{bmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{bmatrix} = x^2+(-a-d)x+(ad-bc)$

Επομένως, ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$ είναι ίσος με $\det A$, δηλ. $\chi_A(0_F) = \det A$.
Πιο γενικά, έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\chi_A(0_F) = \det A$. Άρα
A αντιστρέψιμος $\iff \chi_A(0_F) \neq 0_F \iff$ όχι ιδιοτιμή του A

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 88
Υποθέτουμε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με την ιδιότητα $A^3 = A^2 + 2I_\nu$ $(*)$. Τότε $A^4 = A \cdot A^3 \overset{*}{=} A(A^2 + 2I_\nu) \Rightarrow$
$A^4 = A^3 + 2A \overset{*}{=} A^2 + 2A + 2I_\nu$
Επίσης $A^5 = A \cdot A^4 = A(A^2 + 2A + 2I_\nu) = A^3 + 2A^2 + 2A = 3A^2 + 2A + 2I_n$
Συνεχίζοντας βλέπουμε ότι για κάθε $k \geq 3$ υπάρχουν $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ (που εξαρτώνται από το k) ώστε $A^k = c_2A^2 + c_1A + c_0I_\nu$

ΠΡΟΤΑΣΗ 89
Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε υπάρχει m με $m \leq \nu^2$ και $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{F}$ ώστε
$A^m = c_0I_\nu + c_1A + c_2A^2 + \ldots + c_{m-1}A^{m-1}$
ΑΠΟΔ: Ξέρουμε από Γρ. Ι ότι $\dim \mathbb{F}^{\nu\times\nu} = \nu^2$. Επομένως οι ν^2+1 πίνακες
$I_\nu, A, A^2, A^3, \ldots, A^{\nu^2}$ είναι γρ. εξαρτημένοι. Σαν συνέπεια, υπάρχουν $d_i \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν ώστε $d_0I_\nu + d_1A + d_2A^2 + \ldots + d_{\nu^2}A^{\nu^2} = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$. Επομένως m το μεγαλύτερο απ' τους δείκτες ώστε $d_i \neq 0_F$. Φανερά $m \geq 1$, αλλιώς $d_0I_\nu = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$.
Επομένως, με $d_0 \neq 0_F$ αντίφαση. Θέτουμε $c_j = -\dfrac{d_j}{d_m}$ για
$i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ και το αποτέλεσμα έπεται

ΘΕΩΡΗΜΑ 90 (Cayley-Hamilton)
Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\chi_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ το χαρ. πολυώνυμο του A. Τότε
$\chi_A(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$
ΑΠΟΔ: Για $n=2$ και $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$: Έχουμε $\chi_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$

Συνεπώς, $\chi_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a^2+bc & ad+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(a+b) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Για $\nu \geq 3$ χωρίς απόδειξη.

ΠΑΡΑΔ. Αν $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ και $\chi_A(x) = -x^3+2x+5$, τότε ισχύει $-A^3+2A+5I_3 = \mathbb{O}_{3\times 3}$

ΟΡΙΣΜΟΣ - ΠΡΟΤΑΣΗ 91

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Από πρόταση 89 (ή Πρόταση 90) υπάρχει (μη μηδενικό) μονικό πολ/μο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε $p(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$. Έστω k ο ελάχιστος βαθμός για τον οποίο υπάρχει τέτοιο $p(x)$ με $\deg(x) = k$ και $p(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

φανερά $1 \leq k$ ~~φανερά~~ (γιατί τα πολυώνυμα βαθμού 0) είναι τα μη μηδενικά σταθερά

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ

Το μονικό πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού k με $p(x)=0$ είναι ΜΟΝΑΔΙΚΟ, λέγεται ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ του A και συμβολίζεται $m_A(x)$

(Απόδειξη μοναδικότητας: Έστω $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ μονικά βαθμού k που μηδενίζουν τον A. Υποθέτουμε ότι $p(x) \neq q(x)$ και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Θέτουμε $h(x) = p(x) - q(x)$. Αφού $p(x) \neq q(x)$ έχουμε $h(x) \neq$ του μηδενικού πολυωνύμου. Επίσης $h(A) = p(A) - q(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu} - \mathbb{O}_{\nu\times\nu} = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$. Αφού $p(x)$, $q(x)$ μονικά βαθμού k $\deg h(x) \leq k-1$. Αντίφαση γιατί απ' τον ορισμό του k δεν υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού $\leq k-1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 92

(i) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, τότε $m_A(x) = x-1$ ενώ $\chi_A(x) = (x-1)^2$

(ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ο υπολογισμός δίνει ότι $\chi_B(x) = (x-1)^2$. Ισχυριζόμαστε ότι και το $m_B(x) = \chi_B(x) = (x-1)^2$